第３講　微分・積分

1

[1]　次の空欄に適する数を答えよ．

関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ は，$f(4)=0$ を満たし，$x=3$ で極小値 -27 をとる．このとき，$a=$ □，$b=$ □，$c=$ □ である．p を実数とするとき，点 $(3,\ p)$ を通り，曲線 $y=f(x)$ に接する接線の本数 n について考える．$n=1$ であるような p の値は □ であり，$n=2$ であるような p の値の範囲は □ $<p<$ □，$p<$ □ である．

[2]　関数 $y=|x^3-1|$ のグラフと直線 $y=3x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

[3]　次の □ に適する数を埋めよ．

m を実数とし，関数 $f(x)$ は次を満たすとする．

$$f(x)=mx+2\int_1^2 f(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$k=\int_1^2 f(t)\,dt$ とおくと，①より $k=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}m$ となる．方程式 $y=f(x)$ の表す図形を l とする．l は傾きが m で，m の値に関係なく定点 ($\boxed{エ}$，0) を通る直線である．

2 xy 平面上の放物線 $C: y=x^2$ を考える．C に接し，傾きが -2 の直線を l とし，C と l との接点を P とする．k を正の実数として，l を x 軸方向に k だけ平行移動した直線を m とする．

(1) l，m の方程式を求めよ．

(2) C と m との 2 つの共有点を Q$(\alpha,\ \alpha^2)$，R$(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ とする．$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を k を用いて表せ．

(3) QR の中点を M とする．M の座標を k を用いて表せ．

(4) C と線分 QM と線分 PM とで囲まれた領域の面積を S とし，C と線分 RM と線分 PM とで囲まれた領域の面積を T とする．$S-T$ の値を求めよ．

3　a を実数とし，$f(x)=x^3-ax^2-x-a-2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 $(-1,\ f(-1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 l の方程式を a を用いて表せ.

(2)　a は $a>-2$ の範囲にあるとする．このとき，曲線 $y=f(x)$，直線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積を求めよ.

(3)　実数 t に対して，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を a，t を用いて表せ.

(4)　a は $-2<a<6$ の範囲にあるとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 l 以外にないことを示せ.

第３講　微分・積分

1 [1] $f(4)=0$ より $4^4+4^3a+4^2b+4c=0$　　よって $16a+4b+c=-64$ …… ①

また，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ が $x=3$ で極小値 -27 をとるので，

$f'(3)=0$ より $27a+6b+c=-108$ …… ②

$f(3)=-27$ より $3^4+3^3a+3^2b+3c=-27$　よって $9a+3b+c=-36$ …… ③

①，②，③より $a=-4$，$b=0$，$c=0$

このとき，$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$ より，$x=3$ の前後で $f'(x)$ は負から正に転じ，$f(x)$ は $x=3$ で極小値をもつ.

$f(x)=x^4-4x^3$ より，点 $(t,\ t^4-4t^3)$ における接線の方程式は

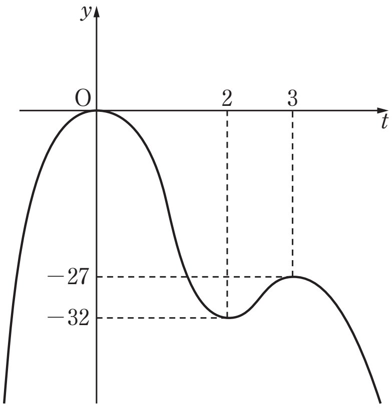
$$y=(4t^3-12t^2)(x-t)+t^4-4t^3 \text{ つまり } y=(4t^3-12t^2)x-3t^4+8t^3$$

これが $(3,\ p)$ を通るとき，$p=-3t^4+20t^3-36t^2$ …… ④

$g(t)=-3t^4+20t^3-36t^2$ とおくと $g'(t)=-12t^3+60t^2-72t=-12t(t-2)(t-3)$

$g(t)$ の増減表および $y=g(t)$ のグラフは以下.

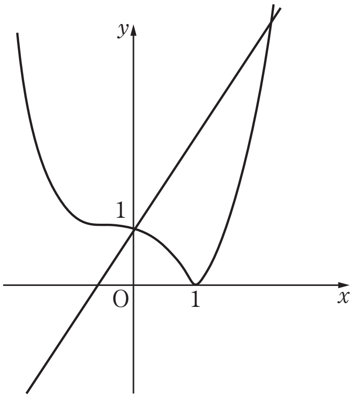
t	…	0	…	2	…	3	…
$g'(t)$	＋	0	－	0	＋	0	－
$g(t)$	↗	0	↘	-32	↗	-27	↘



接線の本数 n は，t の方程式④の異なる実数解の個数であり，2 グラフ $y=g(t)$ と $y=p$ の異なる交点の個数である．よって，$n=1$ となるのは $p=0$ のときであり，$n=2$ となるのは $-27<p<0$，$p<-32$ のときである.

[2] $y=|x^3-1|=\begin{cases} x^3-1 & (x\geqq 1) \\ -x^3+1 & (x<1) \end{cases}$ より，$y=|x^3-1|$ および

$y=3x+1$ のグラフの概形は右図.



$y=x^3-1$ $(x>1)$ と $y=3x+1$ の交点の x 座標は

$x^3-1=3x+1$　　$(x+1)^2(x-2)=0$ より $x=2$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1\{(3x+1)-(-x^3+1)\}\,dx$$
$$+\int_1^2\{(3x+1)-(x^3-1)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(x^3+3x)\,dx+\int_1^2(-x^3+3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=\frac{7}{4}+\frac{11}{4}=\frac{9}{2}$$

[3] $k=\int_1^2 f(t)dt$ より，$f(x)=mx+2k$

$$k=\int_1^2(mt+2k)dt=\left[\frac{m}{2}t^2+2kt\right]_1^2=2m+4k-\left(\frac{m}{2}+2k\right)=2k+\frac{3}{2}m$$

よって $k=-\frac{3}{2}m$

このとき $y=f(x)=mx-3m=m(x-3)$ が表す図形 l は，定点 $(3,\ 0)$ を通る直線である．

2 (1)　$C：y=x^2$ より $y'=2x$　　$2x=-2$ より $x=-1$

よって，C と l の接点の x 座標は $x=-1$ より l の方程式は

$y=-2(x+1)+(-1)^2$　つまり $y=-2x-1$

m の方程式は $y=-2(x-k)-1$ より $y=-2x+2k-1$

(2)　C と m の共有点の x 座標は，方程式 $x^2=-2x+2k-1$

つまり $x^2+2x-2k+1=0$ の 2 解である．これらを α，β とすると

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-2k+1$

よって，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2(-2k+1)=4k+2$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)^3-3\cdot(-2k+1)\cdot(-2)=-12k-2$

(3)　QR の中点 M の座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$　よって $\mathrm{M}(-1,\ 2k+1)$

(4)　点 M と点 P の x 座標はともに $x=-1$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，$-2x+2k-1\geqq x^2$ より

$$\begin{aligned}
S-T&=\int_\alpha^{-1}(-2x+2k-1-x^2)\,dx-\int_{-1}^{\beta}(-2x+2k-1-x^2)\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(2k-1)x\right]_\alpha^{-1}-\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(2k-1)x\right]_{-1}^{\beta}\\
&=\left\{\frac{1}{3}-1-(2k-1)\right\}-\left\{-\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha^2+(2k-1)\alpha\right\}\\
&\quad-\left\{-\frac{1}{3}\beta^3-\beta^2+(2k-1)\beta\right\}+\left\{\frac{1}{3}-1-(2k-1)\right\}\\
&=\frac{2}{3}-4k+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^2+\beta^2)-(2k-1)(\alpha+\beta)\\
&=\frac{2}{3}-4k+\frac{1}{3}(-12k-2)+(4k+2)-(2k-1)\cdot(-2)\\
&=0
\end{aligned}$$

3 (1)　$f(x)=x^3-ax^2-x-a-2$ より $f'(x)=3x^2-2ax-1$

$f(-1)=-2a-2$，$f'(-1)=2a+2$ より，点 $(-1,\ f(-1))$ における $y=f(x)$ の接線 l の方程式は $y=(2a+2)(x+1)-2a-2$　　よって $y=(2a+2)x$

(2)　$y=f(x)$ と直線 l の共有点の x 座標は

$x^3-ax^2-x-a-2=(2a+2)x$

$x^3-ax^2-(2a+3)x-a-2=0$

$(x+1)^2(x-a-2)=0$ より $x=-1,\ a+2$

$a>-2$ より $a+2>0$

よって，曲線 $y=f(x)$，直線 l および y 軸 $(x=0)$ で囲まれた図形のうち，

$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(2a+2)x-(x^3-ax^2-x-a-2)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}(x+1)^2(x-a-2)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}(x+1)^2\{(x+1)-(a+3)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}\{(x+1)^3-(a+3)(x+1)^2\}\,dx$$

$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-(a+3)\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{a+3}{3}\right)=\frac{4a+9}{12}$$

(3)　$(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-2at-1)(x-t)+t^3-at^2-t-a-2$$

よって $y=(3t^2-2at-1)x-2t^3+at^2-a-2$ …… ①

(4)　①が原点を通るとき

$0=-2t^3+at^2-a-2$ …… ②

$(t+1)\{2t^2-(a+2)t+a+2\}=0$

$t=-1$，または $2t^2-(a+2)t+a+2=0$ …… ③

③の判別式を D とすると $D=(a+2)^2-4\cdot 2\cdot(a+2)=(a+2)(a-6)$

$-2<a<6$ のとき $D<0$　よって，③は実数解をもたない．

したがって，②の実数解は $t=-1$ であり，$t=-1$ のときの $y=f(x)$ の接線は(1)より直線 l である．

したがって，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 l 以外にない．